Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$.

Si pour tout $t \in I$, on a $|f(t)| = 1$ alors il existe une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que :

pour tout $t \in I$, on a $f(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)} = \cos\theta(t) + i\sin\theta(t)$.

dém.:

Pour tout $t \in I$, il existe $\theta(t)$ tel que $f(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$. Ce réel $\theta(t)$ étant déterminé à 2π près, il est fort possible que la fonction $t \mapsto \theta(t)$ ainsi déterminée ne soit par régulière. La difficulté ici n'est donc pas de justifier l'existence d'une fonction $t \mapsto \theta(t)$ mais d'en trouver une qui soit de classe $\mathcal{C}^k$.

Analyse :

Supposons que $t \mapsto \theta(t)$ soit solution.

On peut écrire $f(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$ et en dérivant $f'(t) = i\theta'(t)f(t)$ ce qui donne $\theta'(t) = f'(t)/if(t)$.

Ceci détermine θ à une constante près

Synthèse :

Soit $t_0 \in I$ et θ_0 un argument de $f(t_0)$ et considérons $\theta : t \mapsto \int_{t_0}^{t} f'(u)/if(u)\,\mathrm{d}u + \theta_0$.

θ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs complexes.

Posons $g(t) = f(t)\mathrm{e}^{-i\theta(t)}$. La fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^k$ et $g'(t) = \left(f'(t) - i\theta'(t)f(t)\right)\mathrm{e}^{-i\theta(t)} = 0$.

De plus $g(t_0) = 1$, donc g est constante égale à 1.

Ainsi $\forall t \in I, f(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$.

Enfin pour conclure, puisque $|f(t)| = 1$, on a $\theta(t) \in \mathbb{R}$ et donc θ est en fait une fonction à valeurs réelles.

Cor : Soit $\Gamma = (\mathrm{I}, M)$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 2$ du plan géométrique muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. En notant, pour tout $t \in I$, $\vec{T}(t)$ le vecteur tangent de la base de Frénêt au point $M(t)$, il existe une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telle que pour tout $t \in I$ on ait $\alpha(t) = (\vec{i}, \vec{T}(t)) \quad [2\pi]$.

dém. :

Par définition $\vec{T}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \Big/ \left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\|$. L'application $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I et ne s'y annulant pas, on peut affirmer que l'application $t \mapsto \vec{T}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I.

On a donc $\vec{T}(t)\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$ avec $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I.

De plus, puisque $\left\|\vec{T}(t)\right\| = 1$, on a $x^2(t) + y^2(t) = 1$.

Considérons alors la fonction complexe définie par $f(t) = x(t) + i.y(t)$ pour $t \in I$.

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et vérifie $|f(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. Par relèvement, il existe $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telle que $f(t) = \mathrm{e}^{i\alpha(t)}$ pour tout $t \in I$. On a alors $x(t) = \cos\alpha(t)$ et $y(t) = \sin\alpha(t)$ ce qui permet d'écrire $\alpha(t) = (\vec{i}, \vec{T}(t)) \quad [2\pi]$.